ΘΕΜΑ Α

Α1. α) σελ. 15

β) i) σελ. 35

ii) σελ. 35-36

Α2. σελ. 142

Α3. σελ. 135

Α4. α) Λ αιτιολόγηση σχόλιο σελ. 134

β) Λ ισχύει μόνο για συνεχείς συναρτήσεις.

Α5. γ) Γιατί $\int_{\alpha}^{\delta} f(x)dx = E(\Omega_1)+E(\Omega_3)-E(\Omega_2) = 2+3-1=4$ (σελ. 228)

ΘΕΜΑ Β

Β1. Οριζόντια ασύμπτωτη $y=2$ στο $+\infty$, άρα ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(e^{-x}+\lambda) = 2 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^x}+\lambda\right) = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0+\lambda = 2 \Rightarrow \boxed{\lambda=2}$$

Έτσι, $f(x) = e^{-x}+2,\ x\in\mathbb{R}$.

Β2. Έστω $g(x)=f(x)-x,\ x\in\mathbb{R}$

• Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $[2,3]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ g(2) = f(2)-2 = e^{-2}+2-2 = e^{-2} = \frac{1}{e^2} > 0 \\ \bullet\ g(3) = f(3)-3 = e^{-3}+2-3 = \frac{1}{e^3}-1<0 \end{array}\right\} \Rightarrow g(2)\cdot g(3)<0$$

Άρα, ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano για την g στο $[2,3]$. Έτσι, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0 \Rightarrow f(x_0)-x_0=0$.

Επίσης, $g'(x)=f'(x)-1=(e^{-x}+2)'-1=-e^{-x}-1<0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Έτσι, η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η λύση της εξίσωσης $g(x)=0$ θα είναι μοναδική.

B3. Έστω $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow e^{-x_1}+2=e^{-x_2}+2 \Rightarrow e^{-x_1}=e^{-x_2} \overset{e^x}{\underset{1-1}{\Rightarrow}}$

$\Rightarrow -x_1=-x_2 \Rightarrow x_1=x_2$. Έτσι, η f είναι "1-1".

Έστω $f(x)=y \Rightarrow e^{-x}+2=y \Rightarrow e^{-x}=y-2,\ y>2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln e^{-x}=\ln(y-2),\ y>2 \Rightarrow -x=\ln(y-2),\ y>2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=-\ln(y-2),\ y>2 \Rightarrow f^{-1}(y)=-\ln(y-2),\ y>2$.

Έτσι, $f^{-1}(x)=-\ln(x-2),\ x>2$.

B4. Εύρεση κατακόρυφης ασύμπτωτης στο $x_0=2$:

$$\lim_{x\to 2^+} f^{-1}(x)=\lim_{x\to 2^+}(-\ln(x-2)) \xrightarrow[u_0=\lim_{x\to 2^+}(x-2)=0]{u=x-2} \lim_{u\to 0^+}(-(\ln u))=-(-\infty)=+\infty$$

Άρα, $\boxed{x=2}$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της f^{-1}.

Έχουμε: • $f(x)=e^{-x}+2,\ x\in\mathbb{R}$

$f'(x)=-e^{-x}<0,\ x\in\mathbb{R}$ άρα f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

$f''(x)=e^{-x}>0,\ x\in\mathbb{R}$ άρα f κυρτή στο $\mathbb{R}$

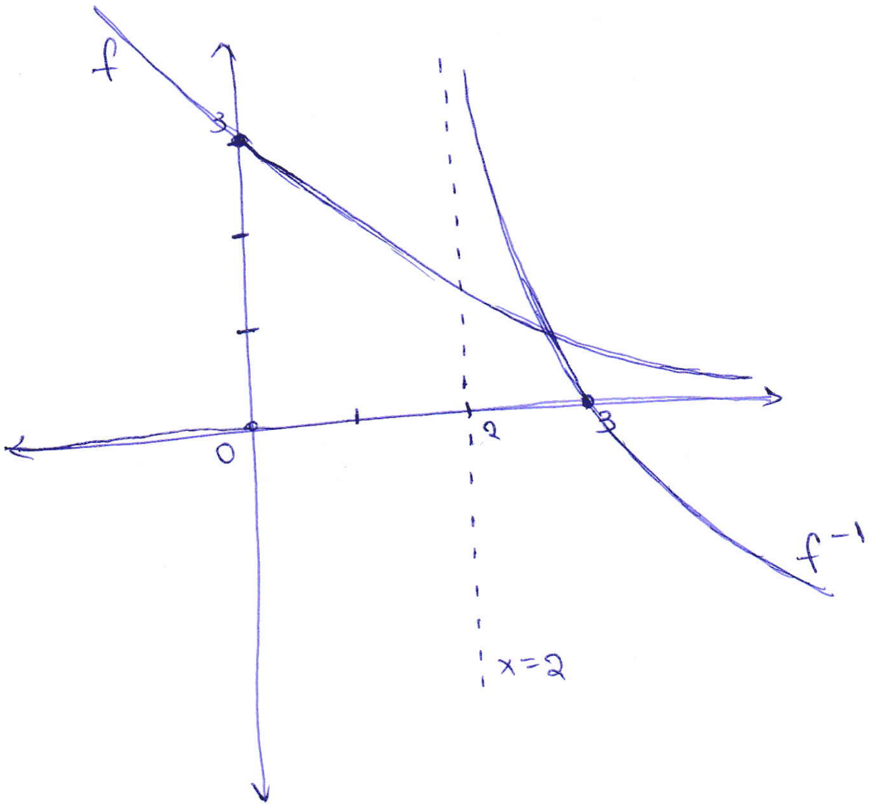
$f(0)=e^0+2=1+2=3$, διέρχεται από το $(0,3)$.

- $f^{-1}(x) = -\ln(x-2)$, $x>2$

$(f^{-1})'(x) = -\frac{1}{x-2} < 0$, $\forall x>2$ άρα f^{-1} γνησίως φθίνουσα στο $(2,+\infty)$

$(f^{-1})''(x) = \frac{1}{(x-2)^2} > 0$, $\forall x>2$ άρα f^{-1} κυρτή στο $(2,+\infty)$

$f^{-1}(x)=0 \Leftrightarrow \ln(x-2)=0 \Leftrightarrow x-2=1 \Leftrightarrow x=3$, διέρχεται από το $(3,0)$



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη θα είναι και συνεχής.

Έτσι, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$ (1)

- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+a) = 1+a$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(e^{x-1}+\beta x) = 1+\beta$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} 1+a = 1+\beta \Rightarrow \boxed{a=\beta}$ (2)

- $f(1) = 1+a$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

- $$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+a-(1+a)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=$$

$$=2$$

- $$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta x-(1+a)}{x-1}\overset{(2)}{=}\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+ax-a-1}{x-1}\ \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+a}{1}=e^0+a=1+a$$

Έτσι, $1+a=2\Rightarrow \boxed{a=1}$ οπότε $\boxed{a=\beta=1}$

Γ2. $$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\geq 1\\ e^{x-1}+x, & x<1\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}2x, & x>1\\ 2, & x=1\\ e^{x-1}+1, & x<1\end{cases}\iff f'(x)=\begin{cases}2x, & x\geq 1\\ e^{x-1}+1, & x<1\end{cases}$$

Έχουμε: $f'(x)=2x>0,\ \forall x\geq 1$ και $f'(x)=e^{x-1}+1>0,\ \forall x<1$.
Έτσι, $f'(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, καθώς γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής.

<u>Σύνολο τιμών:</u>

Έστω $A_1=(-\infty,1)$ και $A_2=[1,+\infty)$.

<u>A_1</u>: $f(x)=e^{x-1}+x$,

- $\lim_{x\to 1^-}f(x)=f(1)=2$
- $\lim_{x\to -\infty}f(x)=\lim_{x\to -\infty}(e^{x-1}+x)=0+(-\infty)=-\infty$

Επειδή, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1)$:

$f(A_1) = (-\infty, 2)$, καθώς f συνεχής.

<u>Α2</u>: $f(x) = x^2 + 1$, $\quad$ • $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = 2$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2+1) = +\infty$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$:

$f(A_2) = [2, +\infty)$, καθώς f συνεχής.

Άρα, $f(A) = f(\mathbb{R}) = f(A_1) \cup f(A_2) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Γ3. i) <u>Για $x \geq 1$</u>: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2+1 = 0$ Αδύνατη, καθώς $x^2+1 \geq 1$.

<u>Για $x < 1$</u>: Γνωρίζουμε ότι $f(A_1) = (-\infty, 2)$ οπότε $0 \in f(A_1)$ και επειδή η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, η ρίζα της θα είναι μοναδική.

f συνεχής και γνησίως αύξουσα:

$f((-\infty, 0)) = \left(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x), \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)\right) = \left(-\infty, \frac{1}{e}\right)$

$f([0, 1)) = \left(\lim\limits_{x \to 0} f(x), \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)\right) = \left[\frac{1}{e}, 2\right)$

$\left.\begin{array}{l} 0 \in f((-\infty, 0)) \\ 0 \notin f([0,1)) \end{array}\right\} \Rightarrow$ Έτσι, η ρίζα της $f(x) = 0$ ανήκει στο $(-\infty, 0)$ οπότε είναι αρνητική.

ii) $x_0 \in (-\infty, 0) \Rightarrow x_0 < 0 \Rightarrow -x_0 > 0$ (1)

Αν το διάστημα είναι το $(x_0, 1)$:

$f((x_0, 1)) = \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x), \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)\right) = (0, 2)$ καθώς f συνεχής και γνησίως αύξουσα. Έτσι, $f(x) > 0$, $\forall x \in (x_0, 1)$ (2) οπότε και

$f^2(x)>0,\ \forall x\in(x_0,1)$ ③.

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις ① και ② έχουμε $-x_0\cdot f(x)>0$

προσθέτουμε με την ③ κατά μέλη και έχουμε $f^2(x)-x_0f(x)>0$.

Έτσι, $f^2(x)-x_0f(x)=0$ Αδύνατη στο $(x_0,1)$.

Αν το διάστημα είναι το $[1,+\infty)$:

$f([1,+\infty))=[2,+\infty)$ και έτσι $f(x)>0,\ \forall x\in[1,+\infty)$ οπότε

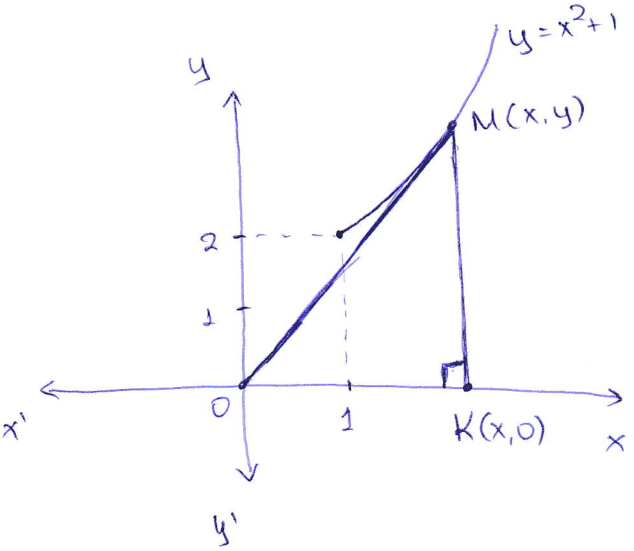
και $f^2(x)>0,\ \forall x\in[1,+\infty)$.

Έτσι, $\left.\begin{matrix}-x_0>0\\ f(x)>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow -x_0f(x)>0$

$\left.\begin{matrix}-x_0f(x)>0\\ f^2(x)>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow f^2(x)-x_0f(x)>0$.

Έτσι, $f^2(x)-x_0f(x)=0$ Αδύνατη στο $[1,+\infty)$.

Γ4.



$$E_{O\hat{K}M}=\frac{B\cdot U}{2}=\frac{(OK)\cdot(KM)}{2}=\frac{x(t)\cdot y(t)}{2}=\frac{x(t)\cdot(x^2(t)+1)}{2}$$

$$E(t)=\frac{1}{2}x^3(t)+\frac{1}{2}x(t)$$

Έχουμε $x(t_0)=3$, $x'(t_0)=2$.

$$E'(t)=\frac{3}{2}x^2(t)\cdot x'(t)+\frac{1}{2}x'(t)=\frac{3x^2(t)\cdot x'(t)+x'(t)}{2}$$

$$E'(t_0)=\frac{3x^2(t_0)\cdot x'(t_0)+x'(t_0)}{2}=\frac{3\cdot 3^2\cdot 2+2}{2}=27+1=28\ \text{τ.μ./sec}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x)=\ln(x^2-2x+2)+(x-1)\cdot\dfrac{2x-2}{x^2-2x+2}+\alpha$

$A(1,1)$ άρα $f(1)=1$ ①
$(\varepsilon): y=-x+2$ εφαπτομένη της C_f στο A άρα $f'(1)=-1$ ②

$$\left.\begin{array}{l} ① \Rightarrow f(1)=1 \Rightarrow \boxed{\alpha+\beta=1} \\ ② \Rightarrow f'(1)=-1 \Rightarrow \boxed{\alpha=-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\beta=2\\ \alpha=-1\end{array}$$

Δ2. $f(x)=(x-1)\ln(x^2-2x+2)-x+2\ ,\ x\in\mathbb{R}$

$$E(\Omega)=\int_1^2|f(x)-y|\,dx=\int_1^2|(x-1)\ln(x^2-2x+2)\cancel{-x}\cancel{+2}\cancel{+x}\cancel{-2}|\,dx\ \underset{x-1>0}{\overset{x\in(1,2)}{=}}$$

$$=\int_1^2(x-1)\cdot\ln(x^2-2x+2)\,dx=I$$

Θέτω $u=x^2-2x+2$ έτσι $du=(2x-2)dx \Rightarrow \dfrac{du}{2}=(x-1)dx$.

Επίσης, $u_1=1^2-2\cdot1+2=1$ (για $x=1$)
$u_2=2^2-2\cdot2+2=2$ (για $x=2$)

$$I=\int_1^2\ln u\,\frac{du}{2}=\frac12\int_1^2\ln u\,du=\frac12\int_1^2(u)'\cdot\ln u\,du=$$

$$=\frac12[u\ln u]_1^2-\frac12\int_1^2\cancel{u}\cdot\frac{1}{\cancel{u}}\,du=\frac12(2\ln2-2\cdot0)-\frac12[u]_1^2=$$

$$=\ln2-\frac12(2-1)=\ln2-\frac12\ \text{τ.μ.}$$

Δ3. (i) $f'(x)=\ln(x^2-2x+2)+\dfrac{(x-1)(2x-2)}{x^2-2x+2}-1=$

$$=\ln(x^2-2x+2)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1.$$

Θεωρώ, $\varphi(x)=f'(x)+1\ ,\ x\in\mathbb{R} \Rightarrow \varphi(x)=\ln(x^2-2x+2)+\dfrac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}\ ,\ x\in\mathbb{R}$

Άρα, $\Phi(x) \geq 0$ γιατί $\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2} \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$. Επίσης, $\ln(x^2-2x+2) = \ln((x-1)^2+1) \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$.

Έτσι, $\Phi(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(x)+1 \geq 0 \Leftrightarrow f'(x) \geq -1$, $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $f(\lambda+\frac{1}{2}) + \lambda \geq (\lambda-1)\ln(\lambda^2-2\lambda+2) + \frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(\lambda+\frac{1}{2}) + \lambda + \frac{1}{2} \geq (\lambda-1)\ln(\lambda^2-2\lambda+2) + \lambda + 2 + \lambda \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h(\lambda+\frac{1}{2}) \geq h(\lambda)$ (1)

Θεωρώ, $h(x) = f(x)+x$, $x \in \mathbb{R}$

$h'(x) = f'(x)+1 \geq 0$ λόγω Δ3 i.

Άρα h γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ (εφόσον είναι και συνεχής ως πράξη συνεχών).

$(1) \underset{\nearrow}{\overset{h}{\Leftrightarrow}} \lambda + \frac{1}{2} \geq \lambda \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq 0$ ισχύει πάντα.

Δ4. $g(x) = -x^3-x+2$, $x \in \mathbb{R}$ $\quad (\varepsilon): y=-x+2$

$g'(x) = -3x^2-1$, $x \in \mathbb{R}$

Έστω $g(x)=y \Leftrightarrow -x^3-x+2 = -x+2 \Leftrightarrow -x^3=0 \Leftrightarrow \boxed{x=0}$ μοναδική λύση

Άρα, η (ε) εφάπτεται στη C_g εφόσον έχουν μοναδικό σημείο τομής το $(0,2)$.

Εφαπτομένη στο $(0,2)$: $y-g(0)=g'(0)(x-0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y-2 = -1 \cdot x \Leftrightarrow \underline{y=-x+2}$.

Άρα, C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη την $y=-x+2$.