ΘΕΜΑ Α

ΘΕΞΕΛΙΞΙΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Α1

Α2

Α3

Α4 Λ - Λ - Λ - Σ - Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Το π.ο. της $f = g \circ h$ είναι

$A_f = A_{g\circ h} = \{x \in A_h \text{ και } h(x) \in A_g\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ h(x) \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow x > 0$ Άρα $A_f = (0, +\infty)$

Ο τύπος της f είναι:

$f(x) = (g \circ h)(x) = \dfrac{4 - e^{2\ln x}}{e^{\ln x}} = \dfrac{4 - e^{\ln x^2}}{x} = \dfrac{4 - x^2}{x}, x > 0$

Β2 i) Για $x > 0$: $f'(x) = \dfrac{-2x \cdot x - (4 - x^2) \cdot 1}{x^2} =$

$= \dfrac{-2x^2 - 4 + x^2}{x^2} = -\dfrac{x^2 + 4}{x^2} < 0$.

Άρα f ↘ για $x \in (0, +\infty)$

ii) Για $x > 0$: $\dfrac{4 - \pi^2}{4 - e^2} > \dfrac{\pi}{e} \Leftrightarrow$ $\left(\begin{matrix} 4 - e^2 < 0 \\ \pi > 0 \end{matrix}\right)$

$\dfrac{\cancel{(4-e^2)}}{\pi} \cdot \dfrac{4 - \pi^2}{\cancel{4-e^2}} < \dfrac{(4-e^2)}{\cancel{\pi}} \cdot \dfrac{\cancel{\pi}}{e} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{4 - \pi^2}{\pi} < \dfrac{4 - e^2}{e} \Leftrightarrow f(\pi) < f(e) \overset{f \downarrow}{\Leftrightarrow} \pi > e$

ισχύει

Β3. Εξετάζω κατακόρυφη στο $x_0=0$:

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{4-x^2}{x} = \lim_{x\to0^+}(4-x^2)\cdot\frac{1}{x} = +\infty$$

- $\lim_{x\to0^+}(4-x^2) = 4>0$
- $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x} \overset{\left(\frac{1}{0^+}\right)}{=} +\infty$

Άρα η f έχει κατακόρυφη την $x=0$.

Εξετάζω πλάγια στο $+\infty$:

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4-x^2}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4-x^2}{x^2} = -1$$

$$\beta = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4-x^2}{x}+x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{4-x^2+x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x} = 0$$

Άρα η f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=-x$.

Β4. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{\frac{4-x^2}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{4-x^2}\cdot\sigma\upsilon\nu(1+x^2)$$

- Για $x>0$: $\left|\frac{x}{4-x^2}\cdot\sigma\upsilon\nu(1+x^2)\right| \leq \left|\frac{x}{4-x^2}\right| \Leftrightarrow$

$$-\left|\frac{x}{4-x^2}\right| \leq \frac{x}{4-x^2}\cdot\sigma\upsilon\nu(1+x^2) \leq \left|\frac{x}{4-x^2}\right|$$

- $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{4-x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{+x}{-x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x} = 0$

Άρα σύμφωνα με ΚΠ προκύπτει

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} = 0.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για $x \geq 1$: $f(x) = \frac{1}{x} + a$.

Άρα $\int_2^3 x f(x)\,dx = \int_2^3 x\left(\frac{1}{x} + a\right)dx =$

$$= \int_2^3 (1 + ax)\,dx = \left[x + \frac{ax^2}{2}\right]_2^3 =$$

$$= 3 + \frac{9a}{2} - \left(2 + \frac{4a}{2}\right) = 3 + \frac{9a}{2} - 2 - \frac{4a}{2} =$$

$$= 1 + \frac{5a}{2}$$

Οπότε $\int_2^3 x \cdot f(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow 1 + \frac{5a}{2} = 1 \Leftrightarrow$

$$\frac{5a}{2} = 0 \Leftrightarrow a = 0.$$

Άρα $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3, & x < 1 \\ \frac{1}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$

Γ2. Για να ορίζεται εφαπτομένη στο $x_0=1$ πρέπει η f συνεχής και
παραγωγίσιμη στο $x_0=1$. Δηλ.

- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$

- $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Για } x=1:\ f(1)=\dfrac{1}{1}=1 \\
\text{Για } x<1:\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-3x+3)=1 \\
\text{Για } x>1:\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x}=1
\end{array}\right\}$$

Άρα f συνεχής στο $x_0=1$

Για $x<1$: $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-3x+3-1}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{x-1}}=-1$

Για $x>1$: $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\frac{1-x}{x}}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1-x}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{-\cancel{(x-1)}}{x\cancel{(x-1)}}=-1$

Άρα $f'(1)=-1$

Η ε.ε στο $x_0=1$ είναι:

$y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-1=-1(x-1) \Rightarrow \boxed{y=-x+2}$

(ii) Ισχύει $\varepsilon\varphi\omega = f'(1) \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = -1$

$\Leftrightarrow \omega = \frac{3\pi}{4}$ rad.

Γ3. Για $x \in (-\infty, 1) = A_1$:

$f'(x) = 2x - 3$

• $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

x	$-\infty$	1	$3/2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$			

Η $f \downarrow$ στο $(-\infty, 1)$

Για $x \in [1, +\infty) = A_2$: $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

Άρα $f \downarrow$ στο $[1, +\infty)$.

Για $x \in A_1$ η $f \downarrow$ και συνεχής άρα

$f(A_1) = \left(\lim_{x\to 1^-} f(x), \lim_{x\to -\infty} f(x)\right) = (1, +\infty)$

• $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$

• $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} (x^2 - 3x + 3) = \lim_{x\to +\infty} x^2 = +\infty$

Για $x \in A_2$ η $f \downarrow$ και συνεχής άρα

$f(A_2) = \left(\lim_{x\to +\infty} f(x), f(1)\right] = (0, 1]$

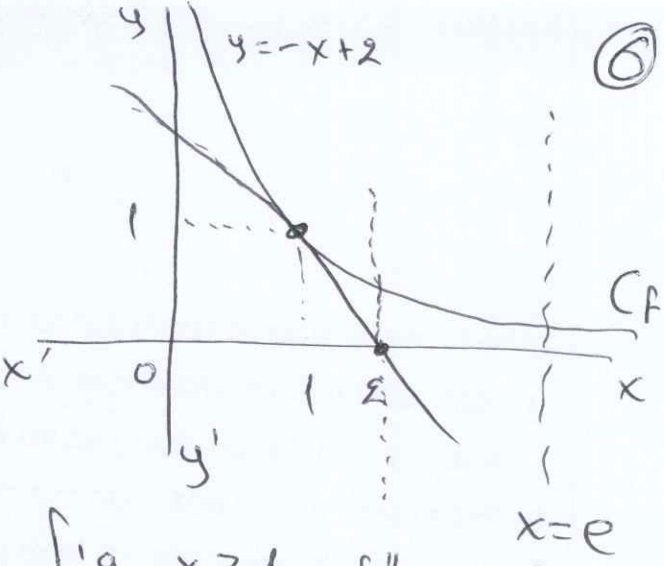
• $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Επειδή $f(A_1) \cap f(A_2) = \varnothing$ (ξένα μεταξύ τους)

προκύπτει f 1-1 ως γν. μονότονη με

$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = (0, +\infty)$

Γ4.



$$E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2)$$

• $E(\Omega_1) = \int_1^2 |f(x) - y|\,dx =$

$= \int_1^2 (f(x) - y)\,dx =$

$= \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + x - 2\right) dx =$

$= \left[\ln|x| + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^2 = \ln 2 + \frac{4}{2} - 4 - \left(\ln 1 + \frac{1}{2} - 2\right) =$

$= \ln 2 + 2 - 4 - \frac{1}{2} + 2 = \ln 2 - \frac{1}{2}$ τ.μ > 0

Για $x \geq 1$: $f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$

Άρα f ∪ οπότε $f(x) \geq y$

• $E(\Omega_2) = \int_2^e |f(x)|\,dx = \int_2^e \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_2^e =$

$= \ln e - \ln 2 = 1 - \ln 2$ τ.μ > 0

Άρα $E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2) =$

$= \ln 2 - \frac{1}{2} + 1 - \ln 2 = \frac{1}{2}$ τ.μ

Για $x \in A_2 = [1,2)$ η $f \downarrow$ και συνεχής

άρα $f(A_2) = \left(\lim_{x\to 2^-} f(x), f(1)\right] = (-\infty, 2]$

• $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3\right) = -\infty$

• Θέτω $2-x = u$ άρα $u_0 = \lim_{x\to 2^-}(2-x) = 0$, $x<2$

• $\lim_{x\to 2^-} \ln(2-x) = \lim_{u\to 0^+} \ln u = -\infty$

Το $0 \in f(A_1)$ με $f \uparrow$ και συνεχής άρα υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (0,1)$ ώστε $f(x_1)=0$

Το $0 \in f(A_2)$ με $f \downarrow$ και συνεχής άρα υπάρχει μοναδικό $x_2 \in (1,2)$ ώστε $f(x_2)=0$

με $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = (-\infty, 2]$

Για $x = \frac{1}{3}$: $f(1/3) = \ln\left(2-\frac{1}{3}\right) - \cancel{3} \cancel{+3} = \ln\frac{5}{3} > 0$

Άρα αφού $f \uparrow$ και $f(x_1) < f(1/3) \Leftrightarrow x_1 < \frac{1}{3}$.

Δ3 Εφαρμόζω ΘΜΤ στο $\left[x_1, \frac{1}{3}\right] \subseteq (0,1)$

• Η f συνεχής στο $[x_1, 1/3]$

• Η f παρ/μη στο $(x_1, 1/3)$

άρα υπάρχει $\xi \in (x_1, 1/3)$ ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(1/3) - f(x_1)}{1/3 - x_1} = \frac{f(1/3) - 0}{\frac{1-3x_1}{3}} = \frac{3f(1/3)}{1-3x_1}$$

Για $x \in (0,2)$: $f''(x) = \frac{-1}{(2-x)^2} - \frac{2}{x^3} < 0$, Άρα $f' \downarrow$

ΘΕΜΑ Δ.

Δ1 Θεωρώ $g(x) = \dfrac{f(x) - 2x}{x-1}$, $x \neq 1$ άρα

$$f(x) - 2x = (x-1)g(x) \Leftrightarrow f(x) = (x-1)g(x) + 2x$$

Η f συνεχής, άρα:

$$f(1) = \lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\left[(x-1)g(x) + 2x\right] = 2$$

Για $x=1$: $f(1) = \ln 1 - 1 + k \Leftrightarrow 2 = -1 + k \Leftrightarrow \boxed{k=3}$

Δ2 Για $x \in (0,2)$: $f(x) = \ln(2-x) - \dfrac{1}{x} + 3$

$$f'(x) = \frac{-1}{2-x} + \frac{1}{x^2} = \frac{-x^2 + 2 - x}{x^2(2-x)}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -2$$

x		-2		0		1		2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$f(x)$					$\nearrow$		$\searrow$		

ο.μ.
$f(1) = 2$

Για $x \in A_1 = (0,1]$ η f ↑ και συνεχής άρα

$$f(A_1) = \left(\lim_{x\to 0^+} f(x), f(1)\right] = (-\infty, 2]$$

- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \ln 2 - \infty + 3 = -\infty$

Άρα υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,1)$ ώστε η κλίση της C_f να είναι $\lambda_\varepsilon = f'(\xi) = \dfrac{3f(1/3)}{1-3x_1}$

Δ4. i) Οι F, G παράγουσες άρα ισχύει $F(x) = G(x) + c$ με $c \in \mathbb{R}$ και $F'(x) = G'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in (0,2)$

• Για $x = x_1$: $F(x_1) = G(x_1) + c \Leftrightarrow$
$0 = G(x_1) + c \Leftrightarrow$
$c = -G(x_1)$ (1)

• Για $x = x_2$: $F(x_2) = G(x_2) + c \Leftrightarrow c = F(x_2)$ (2)

Από (1),(2) ισχύει: $F(x_2) = -G(x_1) \Leftrightarrow$
$F(x_2) + G(x_1) = 0$

ii) Θεωρώ $H(x) = x_1 \cdot F(x) + x_2 G(x) - x_1 - x_2 + 2x$, με $x \in [x_1, x_2]$

Εφαρμόζω Θ. Bolzano για την $H(x)$ στο $[x_1, x_2]$

• Η $H(x)$ είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πράξη συνεχών.

• $H(x_1) \cdot H(x_2) < 0$ επειδή:

• $H(x_1) = x_1 \cdot f(x_1) + x_2 \cdot G(x_2) - x_1 - x_2 + 2x_1 =$

$= x_2 \cdot G(x_2) + x_1 - x_2 < 0$

→ αφού :

$f([x_1, x_2]) = [f(x_1), f(1)] \cup [f(x_2), f(1)] =$

$= [0, 2]$, άρα $f(x) > 0$

για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ δηλ. $G(x) \uparrow$ στο $[x_1, x_2]$

Άρα $x_1 < x_2 \overset{G \uparrow}{\Rightarrow} G(x_1) < G(x_2) = 0$

• $H(x_2) = x_1 \cdot f(x_2) + x_2 \cdot G(x_2) - x_1 - x_2 + 2x_2 =$

$= x_1 \cdot f(x_2) - x_1 + x_2 > 0$