ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο x_0, είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=0$.

β) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α, Β αντίστοιχα, τότε η $g\circ f$ ορίζεται αν $f(A)\cap B\neq\varnothing$.

γ) Για κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ) Αν $0<\alpha<1$, τότε $\lim\limits_{x\to -\infty}\alpha^x=+\infty$.

ε) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ell nx,\ x>0$ και $g(x)=\dfrac{x}{1-x},\ x\neq 1$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$.

Μονάδες 5

Β2. Αν $h(x)=(f\circ g)(x)=\ell n\left(\dfrac{x}{1-x}\right),\ x\in(0,1)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 6

Β3. Αν $\varphi(x)=h^{-1}(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1},\ x\in\mathbb{R}$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 7

Β4. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ και να τη σχεδιάσετε.
(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό.)

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-\eta\mu x,\ x\in[0,\pi]$, και το σημείο $A\left(\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες (ε_1), (ε_2) της γραφικής παράστασης της f που άγονται από το Α, τις οποίες και να βρείτε.

Μονάδες 8

Γ2. Αν (ε_1): $y=-x$ και (ε_2): $y=x-\pi$ είναι οι ευθείες του ερωτήματος **Γ1**, τότε να σχεδιάσετε τις (ε_1), (ε_2) και τη γραφική παράσταση της f, και να αποδείξετε ότι $\dfrac{E_1}{E_2}=\dfrac{\pi^2}{8}-1$, όπου:

- E_1 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες (ε_1), (ε_2), και
- E_2 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}$.

Μονάδες 4

Γ4. Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx > e-1-\pi$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^4}, & x\in[-1,0)\\ e^x\eta\mu x, & x\in[0,\pi]\end{cases}$

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,\pi]$ και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της.

Μονάδες 5

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τη γραφική παράσταση της g, με $g(x)=e^{5x}$, $x\in\mathbb{R}$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x=\pi$ **.**

Μονάδες 6

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση $16e^{-\frac{3\pi}{4}}f(x)-e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}$.

Μονάδες 8

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)</u>

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1) σελ. 253

Α2) α) Ψ (σελ. 217)

β) Έστω $f(x)=|x|$. Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σε αυτό καθώς:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-0}{x-0}=1 \\ &\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x-0}{x-0}=-1 \end{aligned}\right\}\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0}$$

Α3) σελ. 188

Α4) α) Λ

β) Σ

γ) Λ

δ) Σ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1) Πρέπει $\left.\begin{array}{l} x \in A_g \\ g(x) \in A_f \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x \neq 1 \\ \frac{x}{-x+1} > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x \neq 1 \\ x(1-x) > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x \neq 1 \\ x \in (0,1) \end{array}$

Θέλουμε

$x \cdot (1-x) > 0$

Άρα $A_{f\circ g} = (0,1)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
Γιν.		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x}{1-x}\right) = \ln\frac{x}{1-x} \quad , x \in (0,1)$$

Β2) $h(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \quad , x \in (0,1)$

Για $x_1, x_2 \in (0,1)$ με $h(x_1) = h(x_2) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x_1}{1-x_1}\right) = \ln\left(\frac{x_2}{1-x_2}\right)$

$$\overset{\ln}{\underset{\text{"1-1"}}{\Leftrightarrow}} \frac{x_1}{1-x_1} = \frac{x_2}{1-x_2} \Leftrightarrow x_1(1-x_2) = x_2(1-x_1) \Leftrightarrow x_1 - \cancel{x_1x_2} = x_2 - \cancel{x_1x_2}$$

$\Leftrightarrow x_1 = x_2$ οπότε h "1-1" άρα αντιστρέψιμη.

Για να βρούμε την h^{-1}:

$$h(x) = y \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) = y \Leftrightarrow e^{\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)} = e^y \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{1-x} = e^y \Leftrightarrow x = e^y(1-x) \Leftrightarrow x = e^y - e^y x \Leftrightarrow$$

$$x + e^y x = e^y \Leftrightarrow x(1+e^y) = e^y \Leftrightarrow x = \frac{e^y}{1+e^y} \quad , y \in \mathbb{R}$$

Άρα $h^{-1}(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ με $x \in \mathbb{R}$.

Β3. $\phi(x) = h^{-1}(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$, $x \in \mathbb{R}$

Έχουμε $\phi'(x) = \dfrac{e^x(e^x+1) - e^x e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{\cancel{e^{2x}} + e^x - \cancel{e^{2x}}}{(e^x+1)^2} = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0$

Άρα φ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα δεν έχει ακρότατα.

Επίσης, $\phi''(x) = \dfrac{e^x(e^x+1)^2 - 2(e^x+1)\cdot e^{2x}}{(e^x+1)^4} = \dfrac{e^x(e^x+1)(e^x+1-2e^x)}{(e^x+1)^4} =$

$= \dfrac{1-e^x}{(e^x+1)^3}$.

$\phi''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow \boxed{x=0}$

Εάν $1 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < e^0 \overset{e^x \uparrow}{\Leftrightarrow} x < 0$

Εάν $1 - e^x < 0 \Leftrightarrow x > 0$

Άρα για $x>0$ η ϕ είναι κοίλη καθώς $\phi''(x) < 0$.

για $x<0$ η ϕ είναι κυρτή καθώς $\phi''(x) > 0$.

Για $x=0$, $\phi(0) = \dfrac{e^0}{e^0+1} = \dfrac{1}{2}$ άρα το σημείο $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$

είναι σημείο καμπής.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\phi''(x)$	$+$	0	$-$
$\phi(x)$	$\cup$		$\cap$

Σ.Κ.
$\left(0, \frac{1}{2}\right)$

Β4. Οριζόντιες ασύμπτωτες:

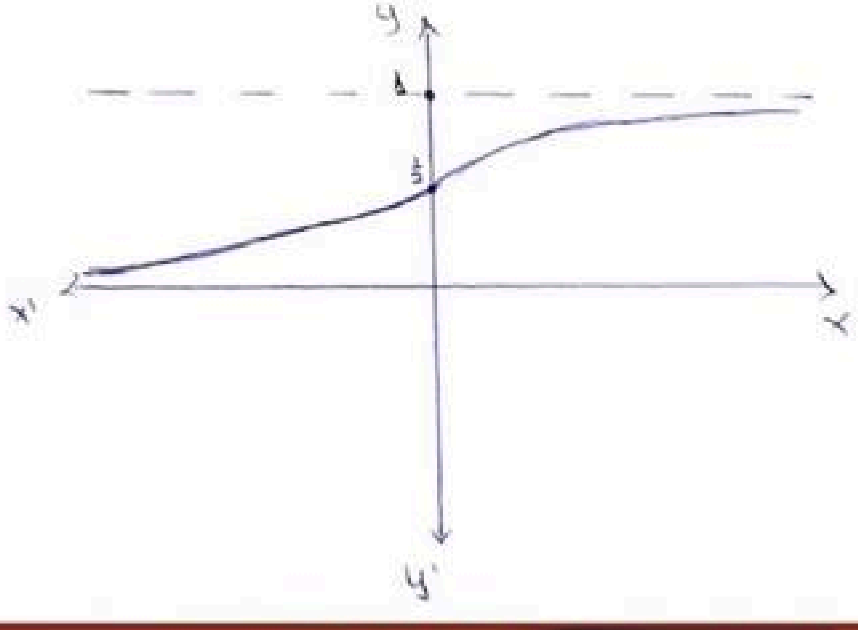
$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+1} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

Άρα στο $+\infty$ έχουμε οριζόντια ασύμπτωτη $\boxed{y=1}$.

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{0}{0+1} = 0$$

Άρα στο $-\infty$ έχουμε οριζόντια ασύμπτωτη $\boxed{y=0}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$		$+$	
$\varphi''(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	0	$\nearrow$	Σ.Κ $(0, \frac{1}{2})$	$\nearrow$	1



ΘΕΜΑ Γ

Γ1) Για κάθε $x_0 \in [0,\pi]$ η εξίσωση εφαπτομένης είναι:

(ε): $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

(ε): $y - ημx_0 = -συνx_0(x - x_0)$

Η (ε) διέρχεται από το $A(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ οπότε

$-\frac{\pi}{2} + ημx_0 = -\frac{\pi}{2}συνx_0 + x_0συνx_0$

$ημx_0 + \frac{\pi}{2}συνx_0 - x_0συνx_0 - \frac{\pi}{2} = 0$

Θεωρώ $g(x) = ημx + \frac{\pi}{2}συνx - xσυνx - \frac{\pi}{2}$ με $x \in [0,\pi]$

Προφανείς ρίζες $x_1 = 0$ και $x_2 = \pi$.

Για $x \in [0,\pi]$: $g'(x) = συνx - \frac{\pi}{2}ημx - συνx + xημx = (x - \frac{\pi}{2})ημx$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ ή $x = 0$ ή $x = \pi$

x	0		$\pi/2$		π
$g'(x)$	0	−	0	+	0
$g(x)$		↘	Ο.Ε.	↗	

Για $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$ η g ↘ άρα $x_1 = 0$ μοναδική ρίζα.

Για $x \in [\frac{\pi}{2},\pi]$ η g ↗ άρα $x_2 = \pi$ μοναδική ρίζα.

Άρα έχουμε ακριβώς δύο εφαπτόμενες της C_f στο (0,0) και στο (π,0) τις: $(ε_1)$: $y + ημ0 = -συν0(x - 0)$

$(ε_1)$: $\boxed{y = -x}$

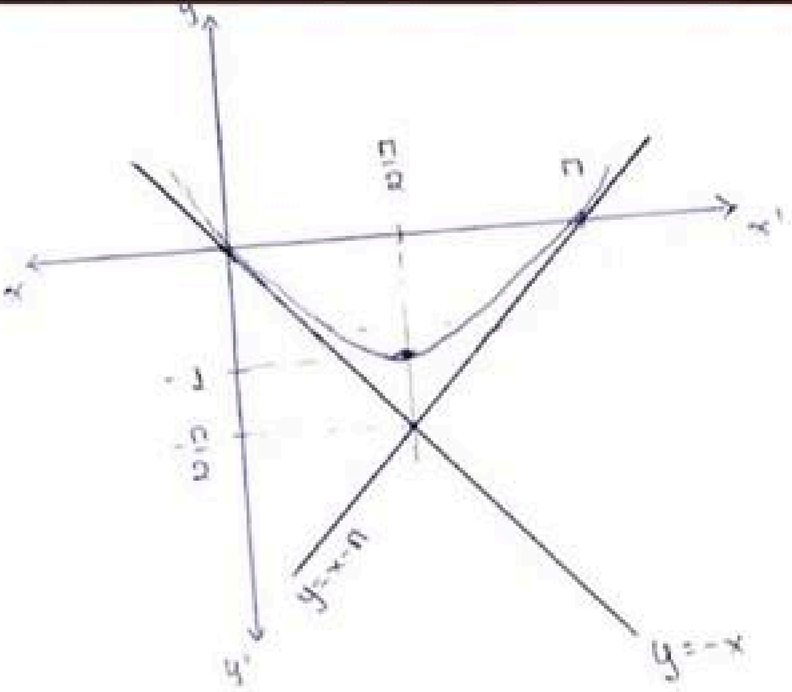
$(ε_2)$: $y + ημπ = -συνπ(x - π)$

$(ε_2)$: $\boxed{y = x - \pi}$

Γ2) (C_f): $f(x) = -\eta\mu x$

(ε_1): $y = -x$

(ε_2): $y = x - \pi$



$$E_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x) - y|\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |f(x) - y|\,dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\eta\mu x + x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\eta\mu x - x + \pi)\,dx =$$

$$= \left[\sigma\upsilon\nu x + \frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\sigma\upsilon\nu x - \frac{x^2}{2} + \pi x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$= \left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} - \sigma\upsilon\nu 0 - \frac{0^2}{2}\right) + \sigma\upsilon\nu\pi - \frac{\pi^2}{2} + \pi^2 - \left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} + \pi\cdot\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{\pi^2}{8} - 1 - 1 - \frac{\pi^2}{2} + \pi^2 + \frac{\pi^2}{8} - \pi^2 = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

$$E_2 = \int_0^{\pi} |-\eta\mu x|\,dx = \int_0^{\pi} |\eta\mu x|\,dx \underset{x\in(0,\pi)}{\overset{\eta\mu x > 0}{=\!=}} \int_0^{\pi} \eta\mu x\,dx = \left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi} =$$

$$= -\sigma\upsilon\nu\pi + \sigma\upsilon\nu 0 = 1 + 1 = 2$$

Άρα $$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{\pi^2}{4} - 2}{2} = \frac{\frac{\pi^2}{4}}{2} - \frac{2}{2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$$

Γ3) $\lim_{x\to\pi} \frac{-\eta\mu x + x}{-\eta\mu x - x + \pi} = \lim_{x\to\pi} \frac{1}{-\eta\mu x - x + \pi}\cdot(-\eta\mu x + x) = +\infty$ αφού

$\lim_{x\to\pi}(-\eta\mu x + x) = \pi > 0$ και $\lim_{x\to\pi} \frac{1}{-\eta\mu x - x+\pi} = +\infty$ επειδή

$-\eta\mu x > x - \pi$

$f(x) > x-\pi$.

Γ4) $f(x) \geq x-\pi$ για $x\in[0,\pi]$ (η ισότητα ισχύει για $x=\pi$)

Άρα $f(x) > x-\pi$ για $x\in[1,e]$

$\frac{f(x)}{x} > 1 - \frac{\pi}{x}$

$\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > \int_1^e \left(1-\frac{\pi}{x}\right)dx$

Έχουμε $\int_1^e \left(1-\frac{\pi}{x}\right)dx = [x-\pi\ln x]_1^e = e - \pi\ln e - (1-\pi\ln 1) =$

$= e-\pi-1$.

Άρα $\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > e-\pi-1$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1) Η f είναι συνεχής στο $[-1,0)$ ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $\sqrt[3]{x}$ και x^4. Επίσης, f συνεχής στο $(0,\pi]$ ως γινόμενο συνεχών (εκθετικής και τριγωνομετρικής).

Ελέγχω τη συνέχεια στο $x_0=0$.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\sqrt[3]{x^4} = 0 \\ &\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}(e^x\eta\mu x) = 1\cdot0 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\lim_{x\to0} f(x) = 0$. Επίσης, $f(0) = e^0\eta\mu 0 = 0$ άρα $\lim_{x\to0} f(x) = f(0)$, η f συνεχής στο 0.

Οπότε $B\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right)$ κρίσιμο σημείο.

Δ2)

x	-1		0		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f(x) = -\frac{1}{3}\sqrt[3]{\lvert x\rvert}$		$-$					
$f(x) = e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$				$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$	$\searrow$	0

Άρα για $x \in [-1,0] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ η f γνησίως φθίνουσα.

Για $x \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$ η f γνησίως αύξουσα.

Το σύνολο τιμών είναι $f([-1,\pi]) = \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$

Δ3) Στο $[0,\pi]$ είναι $g(x)-f(x) = e^{5x} - e^x \eta\mu x = e^x(e^{4x} - \eta\mu x)$.

Όμως, για $x \geq 0$ έχουμε $e^{4x} \geq 1$ (το "=" για $x=0$)
και $\eta\mu x \leq 1$ (το "=" για $x=\frac{\pi}{2}$) $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{4x} - \eta\mu x > 0 \Leftrightarrow g(x)-f(x) > 0$.

$$E = \int_0^\pi (g(x)-f(x))\,dx = \int_0^\pi (e^{5x} - e^x \eta\mu x)\,dx =$$

$$= \int_0^\pi e^{5x}dx - \int_0^\pi e^x \eta\mu x\, dx = \left[\frac{e^{5x}}{5}\right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \eta\mu x\, dx =$$

$$= \frac{e^{5\pi}-1}{5} - \int_0^\pi e^x \eta\mu x\, dx$$

Για $I = \int_0^\pi e^x \eta\mu x\, dx$ έχουμε $I = \int_0^\pi (e^x)' \eta\mu x\, dx =$

$$= [e^x \eta\mu x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \sigma\upsilon\nu x\, dx = 0 - \int_0^\pi (e^x)' \sigma\upsilon\nu x\, dx =$$

$= -\left[e^x \sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \eta\mu x\, dx = e^{\pi}+1 - I$

Άρα $2I = e^{\pi}+1 \Leftrightarrow I = \dfrac{e^{\pi}+1}{2}$

Οπότε $E = \dfrac{e^{3\pi}-1}{5} - \dfrac{e^{\pi}+1}{2}$

Δ4) Έχουμε $16e^{-\frac{3\pi}{4}} f(x) - e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x-3\pi)^2 = 8\sqrt{2}$ $\quad \overset{e^{-\frac{3\pi}{4}}\neq 0}{\Leftrightarrow}$

$$f(x) - \frac{(4x-3\pi)^2}{16} = \frac{8\sqrt{2}}{16e^{-\frac{3\pi}{4}}}$$

$$f(x) = \frac{(4x-3\pi)^2}{16} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$f(x) = \left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2 + \eta\mu\frac{3\pi}{4}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}} \quad (1)$$

Στο $x=\frac{3\pi}{4}$ έχουμε βρει ολικό μέγιστο το $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$ άρα

$(1) \Rightarrow \quad f(x) = \left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2 + f_{max}$

$$f_{max} = -\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2 + f(x)$$

Όμως $f_{max} \geq f(x)$

Άρα $f(x) - \left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2 \geq f(x)$

$$-\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2 \geq 0$$

$$\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2 \leq 0$$

$$x-\frac{3\pi}{4} = 0$$

$\boxed{x = \frac{3\pi}{4}}$ δεκτή.